

Wykorzystanie programu do obliczeń symbolicznych MAXIMA w nauczaniu ekonomii

Kompetencje matematyczne są jednym z głównych czynników wpływających na efektywność nauczania ekonomii. Celem niniejszego opracowania jest przedstawienie obliczeń symbolicznych jako narzędzia w nauczaniu zaawansowanej mikroekonomii. Połączenie e-learningu oraz obliczeń symbolicznych nie tylko wpływa na powiększanie zasobów wiedzy i umiejętności studentów, ale przez wykorzystanie efektu inteligencji grupowej może również zwiększać ich kompetencje społeczne.

Wprowadzenie

W ujęciu historycznym można zauważyć istnienie relacji między postępem matematyki a rozwojem ekonomicznym. Trudno jednak rozróżnić, co jest przyczyną, a co skutkiem. Pytanie, na ile zmiany w matematyce były odpowiedzią na zapotrzebowanie rozwijającej się gospodarki, a na ile wyprzedzały te zmiany, umożliwiając ich zaistnienie, pozostaje nadal nierozstrzygnięte¹. Współcześnie w ujęciu ekonomicznym i politologicznym kompetencje matematyczne społeczeństwa decydują o pozycji danego państwa na arenie międzynarodowej².

Sama ekonomia jako nauka ewoluowała dzięki wprowadzeniu formalnego aparatu matematycznego i według niektórych ekonomistów jest częścią matematyki stosowanej³. Niestety typowe dla matematyki oderwanie się problemów życia codziennego spowodowało pojawienie się krytycznych opinii dotyczących jej zbyt dużej roli w naukach społecznych, do

¹ Jeden z najbardziej znanych propagatorów nowych metod nauczania matematyki, Keith Devlin, uważa, że wprowadzony przez Fibonacciego system liczb był podstawą skoku cywilizacyjnego Europy w późniejszych wiekach. K. Devlin, *The Man of Numbers: Fibonacci's Arithmetic Revolution*, Walker and Company, 2011.

² Raport przygotowany dla prezydenta USA - *Rising above the Gathering Storm* wskazuje na zaniedbania związane z nauczaniem przedmiotów ścisłych jako na główne zagrożenie mocarstwowej pozycji USA. *Rising above the Gathering Storm, Energizing and Employing America for a Brighter Economic Future*, The National Academies Press, Waszyngton 2005, http://www.nap.edu/catalog.php?record_id=11463, [03.11.2012].

³ Omówienie dwóch podstawowych książek P.Mirowskiego i E.W.Weintraub, które analizują rewolucję matematyczną w ekonomii, można znaleźć w następujących recenzjach: M. Brzeziński, Recenzja książki P. Mirowskiego, *Machine Dreams: Economics Becomes a Cyborg Science*, „Studia Ekonomiczne” 2006, nr 4; M. Brzeziński, Recenzja książki E. Roy Weintrauba, *How Economics Became a Mathematical Science*, „Studia Ekonomiczne” 2003, nr 1–2.

których należy ekonomia. Kryzys ekonomiczny bardzo wzmocnił tę krytykę⁴. Głównym problemem, dostrzeganym zarówno przez zwolenników szerokiego wprowadzenia matematyki w nauczaniu ekonomii, jak i jej przeciwników, jest zbytne skoncentrowanie się na żmudnych rachunkach. Przedstawiane na poziomie studiów magisterskich (II stopnia) zadania z mikroekonomii nie są nawet modelowaniem matematycznym, lecz w przeważającej mierze są to rachunki⁵. Zastosowanie programu do obliczeń symbolicznych daje możliwość ich wyeliminowania i skoncentrowania się na analizie zagadnień ekonomicznych. W niniejszym opracowaniu przedstawiona zostanie idea połączenia obliczeń symbolicznych i naturalizmu ekonomicznego Roberta H. Franka do poprawy efektywności nauczania mikroekonomii na poziomie studiów magisterskich.

Nauczanie ekonomii a matematyka

Jeśli przyjąć skrajne założenie, że ekonomia jest jedynie częścią matematyki stosowanej, to problemy nauczania ekonomii i matematyki powinny być tożsame. Jednym z głównych problemów nauczania matematyki jest mimowolnie przyjęcie przez prowadzącego założenia, że przedstawiona teoria kiedyś się słuchaczom przyda, ale jest jeszcze zbyt wcześnie na jej użycie, gdyż student nie jest do tego wystarczająco przygotowany. Warunkiem koniecznym zastosowania poznanej wiedzy jest przejście następnego stopnia wtajemniczenia. Niestety zwykle kolejny stopień zaczyna się przyjęciem identycznego założenia. Ten schemat może powtórzyć się kilkakrotnie. Dzięki literackiej paraleli i wizji *ad absurdum* bardzo obrazowo ten problem przedstawił w swoim esej *A Mathematician's Lament* Paul Lockhart⁶ – gdzie przedstawiony powyżej schemat nauczania matematyki został przeniesiony na grunt muzyki i malarstwa. Gdyby warunkiem zagrania utworu muzycznego lub namalowania obrazu była wystarczająca wiedza teoretyczna adeptów sztuki, to absolwent studiów muzycznych nigdy nie zagrałby żadnego utworu, a absolwent studiów plastycznych nie zbliżył się do sztalug. Ich

⁴ Mark Blaug porównuje sposób uprawiania ekonomii do matematyki społecznej, w której o sukcesie decyduje formalizm matematyczny, a nie zgodność teorii z praktyką. Szersze omówienie krytycznej roli matematyki w ekonomii można znaleźć w publikacji: W. Kwaśnicki, *Czy kryzys finansowy przyczynia się do kryzysu w naukach ekonomicznych*, „Studia ekonomiczne” 2009, nr 3–4 (LXII–LXIII).

⁵ W języku angielskim istnieje rozróżnienie na: a) *clausus* – w rozumieniu formalnego systemu obliczeń potocznie kojarzonego z obliczeniami w ramach tradycyjnych zajęć z matematyki oraz na b) *computation* – słowo, które współcześnie odnosi się do obliczeń komputerowych. W języku polskim tego typu rozróżnienia brakuje. W celu rozróżnienia pokrewnych pojęć w niniejszym opracowaniu słowo *rachunki* będzie przypisane do tradycyjnych obliczeń przy pomocy kartki i papieru, natomiast słowo *obliczenia* będzie przypisane do obliczeń komputerowych. Analogicznie powstała nazwa nowego kierunku – ekonomia obliczeniowa.

⁶ Wprowadzeniem do tajemniczego świata matematyki Paula Lockharta jest prezentacja promująca jego książkę zamieszczona na stronie: <http://www.hup.harvard.edu/catalog.php?isbn=9780674057555>, [03.11.2012]. Esej wprowadzający do tej książki znajduje się na stronie *Mathematical Association of America*, http://www.maa.org/devlin/devlin_03_08.html, [03.11.2012].

poziom poznania teorii byłby zawsze zbyt niski w stosunku do oczekiwań nauczycieli. Autor proponuje odejść od takiego schematu nauczania matematyki, a pierwszym krokiem jest zmiana nastawienia samych nauczycieli.

Zdaniem Paula Lockharta matematyka powinna być traktowana jako sztuka, w której istotą jest zgłębianie tajemnic oraz dociekanie, a nie schematyczne powtarzanie rachunków. Ten esej wpisuje się w cały szereg inicjatyw zmierzających do reformy edukacji matematycznej. Przedstawione już w 1905 r. na kongresie matematyków w Merano dwa postulaty Feliksa Kleina miały na celu oderwanie studentów od żmudnych rachunków na korzyść modelowania matematycznego. Pierwszym z postulatów było odejście od miar w przedstawianiu problemu matematycznego. Drugim z nich był postulat formułowania problemów matematycznych oraz ich rozwiązań w postaci funkcyjnej⁷. Równie ważna dla Kleina była wizualizacja przedstawianych zagadnień. Współcześnie wraz z rozwojem narzędzi IT oraz programów do obliczeń symbolicznych, takich jak np. *Computer Algebra System* (CAS), postulaty Kleina mogą być coraz śmielej realizowane. Ideę odejścia od rachunków w nauczaniu matematyki próbują wdrożyć na szeroką skalę bracia Stephen i Conrad Wolfram. Pierwszy z nich znany jest jako twórca programu do obliczeń symbolicznych – *Mathematica*. Drugi jest znanym popularyzatorem nowego podejścia do nauczania matematyki oraz twórcą projektu zmierzającego do reformy nauczania matematyki w oparciu o obliczenia komputerowe⁸.

Podejście obliczeniowe nie rozwija się tak szybko jak prorokowali jego orędownicy. Wynika to zarówno z konserwatyizmu matematyków, jak i czysto ekonomicznych względów. Idea obliczeniowej matematyki, promowana przez braci Wolfram, opiera się na oprogramowaniu komercyjnym, którego cena nawet w wersji edukacyjnej jest wysoka⁹. Rozwiązaniem jest użycie oprogramowania *open source*. Jednym z najlepszych darmowych programów do obliczeń symbolicznych jest MAXIMA, stanowiący rozwinięcie jednego z najstarszych programów obliczeń symbolicznych Macsyma¹⁰.

Ekonomia jest częścią nauk społecznych, a problemy wynikające z jej nauczania wykraczają poza problemy nauczania matematyki. W nauczaniu ekonomii na pewnym etapie edukacji student musi być w stanie: przełożyć problem ekonomiczny na model formalny, znaleźć jego rozwiązanie analityczne, umieć zanalizować uzyskane wyniki, odnosząc je

⁷ W Polsce jednym z głównych orędowników wyeliminowania obliczeń z nauczania matematyki jest Wacław Zawadowski, który jest niestrudzonym popularyzatorem narzędzi informatycznych w nauczaniu matematyki.

⁸ Więcej informacji można znaleźć na stronie <http://computerbasedmath.org/>, [03.11.2012].

⁹ Wprawdzie darmowy portal internetowy Wolfram Alpha jest traktowany jako zamiennik oprogramowania komercyjnego, ale dostęp w pełnej wersji Pro nadal kosztuje blisko 30 dol. miesięcznie, <http://www.wolframalpha.com/pro/?src=footer>, [03.11.2012].

¹⁰ Więcej informacji można znaleźć na stronie projektu: <http://maxima.sourceforge.net/>, [03.11.2012].

zarówno do skutków czysto ekonomicznych – Pareto efektywności – jak również ich skutków społecznych. Jednak jeżeli przyjrzeć się bliżej praktyce nauczania ekonomii, to większość problemów analizowanych podczas zajęć ogranicza się do wtłoczonych na siłę w scenografię ekonomiczną ekstensywnych obliczeniowo zadań z analizy matematycznej i algebry liniowej. Głównym problemem w nauczaniu ekonomii jest brak powiązania prezentowanych problemów z rzeczywistymi i bieżącymi problemami życia gospodarczego. Jeżeli nawet występują zadania „z treścią”, to są one oderwane od realiów danego kraju i jego bieżącej sytuacji.

Można znaleźć kilka sposobów radzenia sobie z tym problemem. Jednym z nich jest przyjęcie skrajnego stanowiska – odejście od formalizmu matematycznego na korzyść podejścia naturalistycznego. Jest to postulat Roberta H. Franka, który proponuje zawęzić nauczanie ekonomii do kilku niezbędnych tematów i na tej podstawie uczyć studentów dostrzegania problemów ekonomicznych w każdej napotkanej sytuacji życiowej. Budowanie tej umiejętności jest wzmacniane przez system prac domowych polegających na naturalnej, zrozumiałej dla niewtajemniczonych, wypowiedzi pisemnej, której celem jest odpowiedź na wcześniej postawione pytanie ekonomiczne¹¹. Jest to powrót do postulatów Alfreda Marshalla, który użycie matematyki chciał zawęzić do nadania logicznej struktury opisowi zjawisk ekonomicznych. Opis ten miał być zrozumiały dla szerokiego grona odbiorców nieprofesjonalnych¹². Naturalizm ekonomiczny może być bardzo pomocny w początkowym etapie nauczania ekonomii, jednak w dalszym etapie powinien ewoluować w kierunku konfrontacji teorii ekonomii opartej zwykle na mocnych podstawach matematycznych z obserwacjami życia codziennego. Student – jak inżynier – powinien na podstawie teorii umieć skonstruować model i poddać go stres-testom, by sprawdzić, czy dobrze odwzoruje on zachowanie rzeczywistych procesów ekonomicznych. Warunkiem koniecznym zastosowania tego podejścia jest odejście od czasochłonnych obliczeń na korzyść uprawiania sztuki, jaką jest modelowanie ekonomiczne. Studenci powinni testować na wszystkie sposoby prezentowane modele ekonomiczne, a nie zmagać się z oporną materią rachunków.

Podejście polegające na testowaniu teorii i konfrontacji z praktyką wiąże się również z realizacją drugiego z postulatów Feliksa Kleina – przedstawiania zależności ekonomicznych w postaci funkcyjnej. Aksjomatyczne potraktowanie teorii mikroekonomicznej na wyższych

¹¹ W. Sosnowska, *Nauczanie ekonomii w XXI wieku – kształtowanie umiejętności posługiwania się wiedzą ekonomiczną (economic literacy)*, [w:] D. Kopycińska (red.), *Dzielenia ekonomiczne podmiotów rynkowych – materiały konferencyjne*, [online], Katedra Mikroekonomii Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 2007.

¹² J. Dzionek-Kozłowska, *System ekonomiczno-społeczny Alfreda Marshalla*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2007.

latach studiów jest ucieczką w formalizm i unikaniem konfrontacji modeli matematycznych z praktyką. Przedstawianie modeli w postaci funkcyjnej daje doskonałą możliwość analizy ich zachowań w zależności od przyjętych parametrów i porównania ich z obserwowanymi zachowaniami systemów ekonomicznych. Niespodziewanym efektem parametryzacji uzyskanych zależności jest pojawienie się złożoności nawet w bardzo prostych modelach wyjściowych.

Przykład zastosowania – płaszczyzna Laffera 3D

Aby pokazać różnicę jakościową między podejściem tradycyjnym a podejściem opartym na metodach obliczeniowych, połączonym z naturalizmem ekonomicznym, można posłużyć się prostym modelem rynku. Zwykle tego typu zadania polegają na porównaniu warunków równowagi w przypadku rynku nieregulowanego i z wprowadzaniem narzędzi polityki gospodarczej. Przyjmuje się w nich pewne warunki określone przez funkcję popytu q_d i podaży q_s oraz określa wartość nałożonego podatku, subsydium lub ceny regulowanej. W przypadku określenia, jak stawka podatku *ad valorem* t oddziałuje na warunki rynkowe, sprowadza się do rozwiązywania układów równań, który może przyjąć postać:

Rynek bez regulacji	Rynek z nałożonym podatkiem <i>ad valorem</i> = 0.1
$\begin{cases} q_d = 1000 - 5 * p_d \\ q_s = -250 + 2 * p_s \\ q_d = q_s \end{cases}$	$\begin{cases} q_d = 1000 - 5 * p_d \\ q_s = -250 + 2 * p_s \\ q_d = q_s \\ p_d = p_s(1 + 0.1) \end{cases}$

Porównanie stanów równowagi przed i po wprowadzeniu podatku umożliwia określenie oddziaływania interwencji rządu na dobrobyt społeczny. Obliczanie zmian w nadwyżce konsumenta, producenta i wpływów podatkowych wymaga dodatkowych kilku, kilkunastu minut rachunków. Jednak wynik postaci: cena konsumenta i producenta przed podatkiem $p_d = p_s = 178$, ilość produkowana $q = 107$, cena konsumenta po nałożeniu podatku wzrośnie do $p_d = 183$, a cena producenta spadnie do $p_s = 166$ itd., jest zupełnie oderwany od rzeczywistych wielkości ekonomicznych i na podstawie tych obserwacji trudno wyciągnąć wnioski dotyczące realnej gospodarki. Najgorsze jest jednak to, że ogólne wnioski tej analizy są znane studentom. Zadanie to jest powtórzeniem analizy oddziaływania podatków przedstawionej w podręczniku – zmieniają się jedynie parametry funkcji popytu i podaży oraz stawka podatku. Ostatecznie w tym zadaniu celem samym w sobie są rachunki. Połączenie

ekonomii naturalistycznej z obliczeniową może diametralnie zmienić postrzeganie tego problemu i zachęcić studentów do własnych poszukiwań, a nie jedynie powtarzania wzorca z podręcznika. Pierwszym krokiem jest zaczepienie przedstawionej teorii w bieżącej sytuacji ekonomicznej, czyli znalezienie tematu, zaś dalej należy wykorzystać podejście obliczeniowe i możliwe wizualizacje.

Tematów opowieści, w które możemy włożyć model rynku, jest wiele. Dostarcza ich prasa, film lub codzienna obserwacja. I tak zebranie kilku informacji z ostatnich miesięcy przynosi następujące spostrzeżenia:

- kryzys finansowy w Polsce wymusza zwiększenie obciążeń podatkowych,
- realizuje się program maksymalnego zliberalizowania rynków i odejścia od koncesjonowania działalności gospodarczej.

Oznacza to, że na niektórych rynkach jednocześnie dojdzie do zwiększenia obciążeń podatkowych oraz zwiększy się liczba działających podmiotów. Jak działanie tych dwóch narzędzi może wpłynąć na wpływy podatkowe?

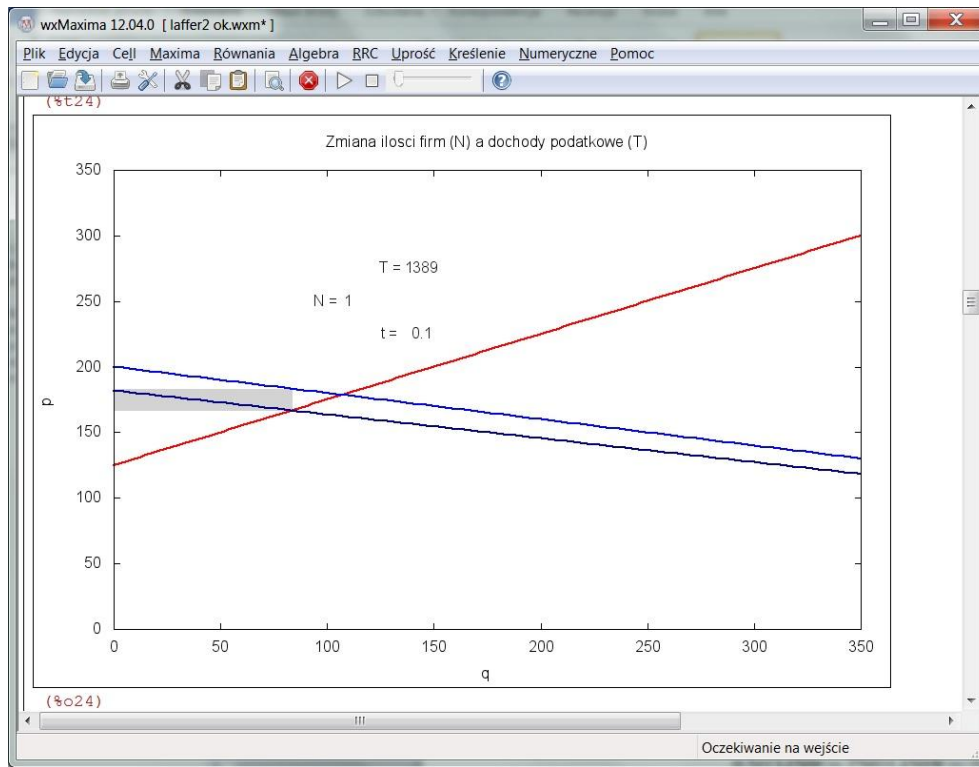
W podejściu obliczeniowym punktem wyjścia jest model popytu i podaży przedstawiony w poprzedniej części, ale wykorzystanie oprogramowania do obliczeń symbolicznych pozwala na uzyskanie wyników zależnych od parametrów, a nie konkretnych wartości liczbowych. W tym przypadku parametrami są: stopa podatkowa t oraz liczba działających na rynku firm N , która zwielokrotnia podaż rynkową q_s .

Rynek z nałożonym podatkiem *ad valorem* t oraz zmienną liczbą przedsiębiorstw N

$$\begin{cases} q_d = 1000 - 5 * p_d \\ q_s = N * (-250 + 2 * p_s) \\ q_d = q_s \\ p_d = p_s(1 + t) \end{cases}$$

Analizę tego problemu, obejmującą wizualizację wpływu zmiany podatku oraz liczby firm na wielkość wpływów podatkowych, można zrealizować na kilka sposobów. Jednym z nich jest stworzenie animacji, w której pole powierzchni reprezentujące wpływy podatkowe zmienia się w zależności od zmiany w stopie podatkowej t lub od liczby firm działających na rynku N . Interfejs graficzny wxMAXIMA (rysunek 1) pozwala na kontrolę animacji, wyświetlanie wartości parametrów t i N oraz obliczonej wartości wpływów podatkowych T dla zadanych parametrów.

Rysunek 1. Interfejs graficzny wxMaxima – animacja zmian wpływów podatkowych w modelu popytu i podaży



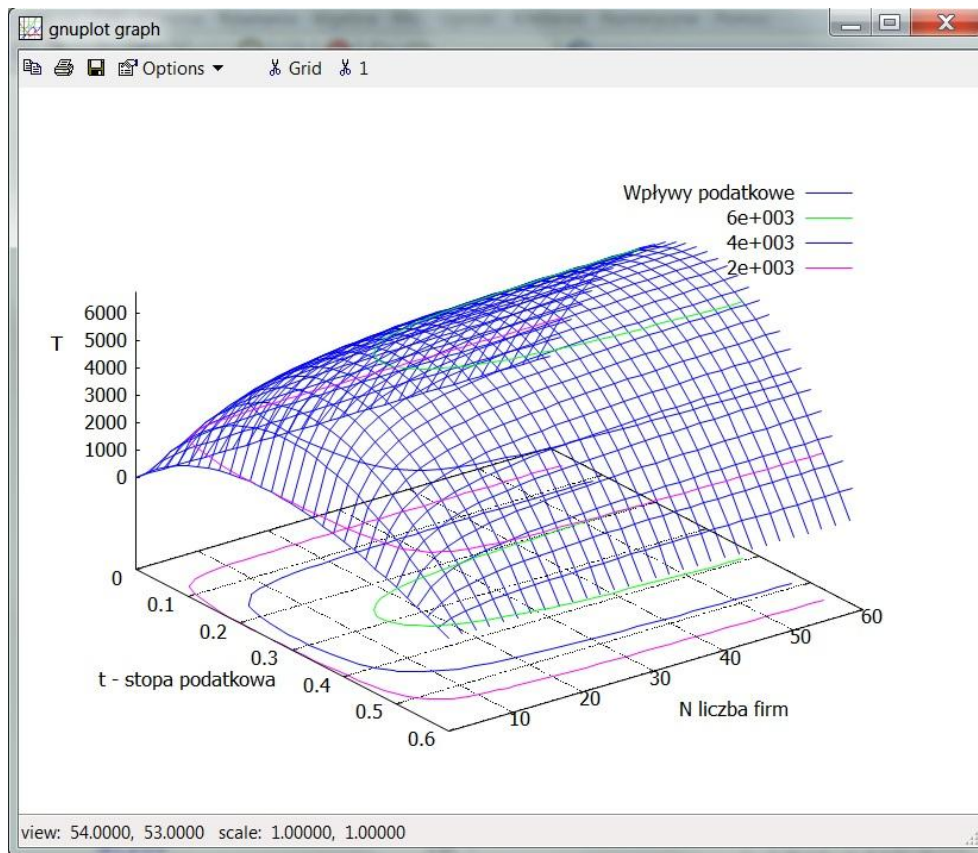
Źródło: opracowanie własne; kody dostępne są na stronie projektu matematyki obliczeniowej <http://lee.wne.uw.edu.pl/maxima>

Bardzo ważnym składnikiem wykorzystania metod obliczeniowych jest parametryzacja wyniku. Dla powyższego przykładu wpływy podatkowe są funkcją parametrów t oraz N .

$$T = \frac{0.5t(1250t - 750) \left(250N - \frac{(1250t - 750)}{2N + 5t + 5} \right)}{2N + 5t + 5}$$

Wynik ten nie jest łatwy do uzyskania rachunkowo przy pomocy ołówka i papieru, tym bardziej problematyczna wydaje się analiza własności samej funkcji, która nie jest liniowa ani ze względu na t ani N . W przypadku programów CAS uzyskuje się natychmiastowo wynik i jego wizualizację. Na rysunku 2 przedstawiona jest trójwymiarowa zależność wpływów podatkowych T od stopy podatku t oraz liczby działających firm N . Jest to wizualizacja 3D zależności Laffera, w której dodatkową zmienną jest liczba podmiotów działających na rynku. Jest to zależność doskonale znana z podręczników, choć formalnie bardzo rzadko w tych podręcznikach wprowadzana.

Rysunek 2. Interfejs graficzny wxMaxima – wizualizacja 3D funkcji wpływów podatkowych T zależnej od stopy podatkowej t oraz liczby działających na rynku firm N



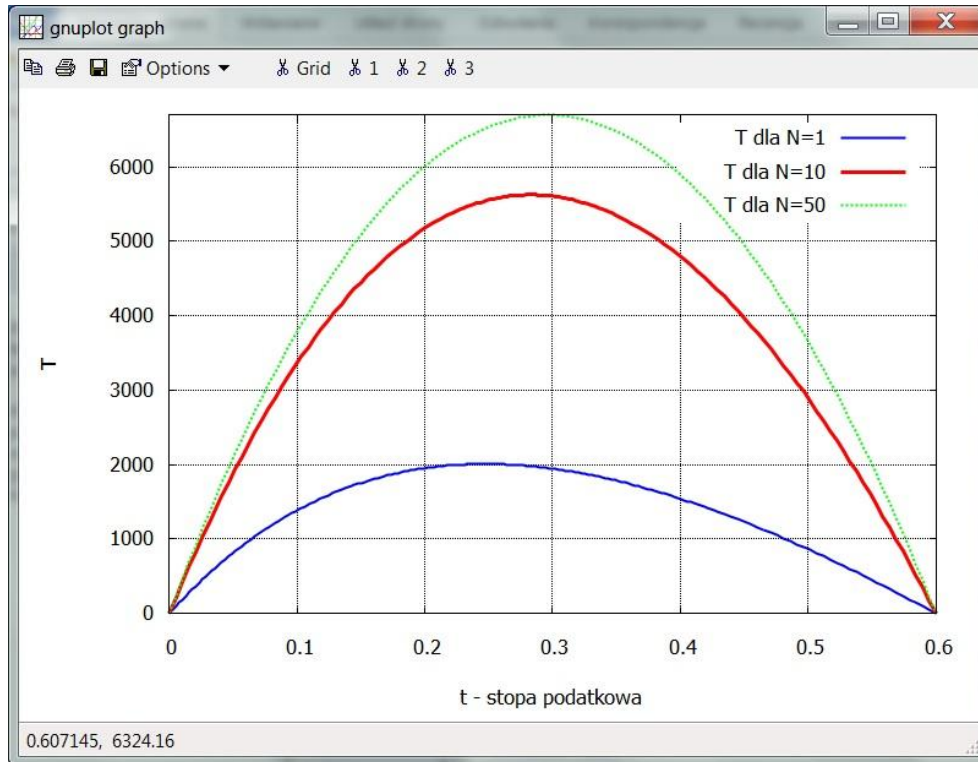
Źródło: opracowanie własne; kody dostępne są na stronie projektu matematyki obliczeniowej <http://lee.wne.uw.edu.pl/maxima>

Sam kształt zależności wskazuje, że jest to problem złożony, a przez to można pozostawić studentom duże pole do interpretacji uzyskanych wyników. Nadal nie rozstrzygnięte są następujące problemy badawcze:

- czy istnieje optymalna – z punktu widzenia wpływów podatkowych – kombinacja stopy podatkowej oraz liczby działających firm,
- czy wraz ze zwiększeniem się liczby firm opłaca się rządowi zmniejszać, czy zwiększać obciążenia podatkowe.

Aby odpowiedzieć na te pytania, student musi wykorzystać odpowiednie narzędzia analizy graficznej oraz rozwiązania analityczne. I tak na rysunku 3 przedstawiony jest wykres zachowania się krzywej Laffera dla liczby firm równej 1, 10, 50, gdzie – jak widać – wzrost liczby firm nie przekłada się proporcjonalnie na wpływy podatkowe oraz paradoksalnie maksimum wpływów podatkowych jest osiągnięte przy zwiększeniu liczby firm, gdy rośnie obciążenie podatkowe z $t = 0.24$ dla $N=1$ oraz $t = 0.29$ dla $N = 50$.

Rysunek 3. Interfejs graficzny wxMaxima – rzutowanie funkcji wpływów podatkowych T zależnej od stopy podatkowej t oraz liczby działających na rynku firm dla $N = 1, 10, 50$



Źródło: opracowanie własne; kody dostępne są na stronie projektu matematyki obliczeniowej <http://lee.wne.uw.edu.pl/maxima>

Oczywiście pozostaje problem oprogramowania przedstawionych zadań. Jeżeli jednak raz już zostanie stworzony kod do obliczenia warunków równowagi rynkowej z podatkami, to rozwiązanie innych problemów tego typu wymaga jedynie małych korekt. Zmiana własności funkcji popytu i podaży nie wymaga ponownych żmudnych obliczeń, lecz jedynie powtórnego wywołania kodu ze zmienionymi warunkami początkowymi. Można też na podstawie istniejącego rozwiązania przedstawić inny problem badawczy. Na przykład zanalizować wydatki i wydatki rządowe w przypadku subsydium na rynku, na którym będzie działało N nowych firm. Całość modyfikacji kodu polega na wprowadzeniu jednej zmiany: zamiast $eq3: p_d = p_s*(1 + t)$ będzie subsydium $eq3:p_d = p_s*(1 - t)$; oraz wielkość wydatków będzie równa $G:s*q_{star}$.

Tego typu modyfikacji wyjściowego modelu może być bardzo dużo. Można jako funkcję subsydium (s) przedstawić bezpowrotną stratę społeczną lub wielkość wydatków rządowych.

Można wstawić jako parametr liczbę konsumentów (agregacja funkcji popytu), dodać nieliniowość funkcji itp.

Student, bawiąc się tym problemem obliczeniowym, uczy się, że musi dobrze przedstawić rozwiązanie graficzne problemu, aby móc je przeanalizować. Co najważniejsze, może być krytyczny do omawianego modelu i wskazać jego wady. Warto zachęcać studentów do stres-testów modelu, czyli przez zmianę parametrów początkowych i określenie, jak to oddziałuje na możliwości wyjaśniania tego modelu – kiedy się on „wywróci”. I tak w przypadku tego modelu można pokazać, że dla określonych parametrów funkcji popytu i podaży maksimum wpływów podatkowych T jest osiągnięte przy stopie podatkowej znacznie wyższej niż 1. Jest to wynik interpretowalny, ale mało wiarygodny w przypadku realnych procesów. Z drugiej strony, uwolniony od rachunków student ma możliwość zadawania pytań o konsekwencje społeczne podjęcia danych działań, np. jak podnoszenie podatków wpływa na system motywacyjny. Nie mieści się to w ramach analizy przedstawionego modelu, ale może stanowić jego cenne rozszerzenie.

Metody obliczeniowe a kompetencje społeczne

Zastosowanie metod obliczeniowych do nauki mikroekonomii zaawansowanej było w przypadku autora podyktowane koniecznością dostosowania się do zmian natury instytucjonalnej. Wprowadzenie procesu bolońskiego i możliwości rozpoczęcia po licencjacie studiów na nowym kierunku spowodowały, że realizacja typowego rozszerzenia mikroekonomii, polegającego na formalizacji modeli, nie mogła się powieść ze względu na nowych studentów, których zarówno kompetencje matematyczne, jak i wiedza ekonomiczna na to nie pozwalały. Rozwiązanie polegające na powtarzaniu materiału z pierwszych lat studiów I stopnia zniechęciłoby natomiast do uczestnictwa w tych wykładach studentów, którzy takie kursy już przeszli. Pogodzeniem dwóch rozbieżnych potrzeb studentów było odejście od formalizmu matematycznego na korzyść przedstawienia aplikacyjnych możliwości mikroekonomii. Pozostawał jednak problem kompetencji matematycznych, których brak uniemożliwiał realizację tego zamierzenia.

Ekonomia obliczeniowa wydawała się szansą na poradzenie sobie z tymi problemami. W literaturze mikroekonomicznej brakuje jednak przykładów użycia metod obliczeniowych, które stanowiłyby znaczącą wartość dodaną w stosunku do metod tradycyjnych. Właściwie większość przykładów obliczeniowej mikroekonomii jest odtworzeniem przykładów z podręczników w środowisku komputerowym. Jediną ich wartością dodaną jest użycie

animacji oraz wizualizacji 3D¹³. Co zastanawiające, brakuje też szerokiego wykorzystania podejścia funkcyjnego. Dopiero zapoznanie się z pracami metodologów nauczania matematyki umożliwiło autorowi pewne przybliżenie do sposobu prowadzenia zajęć z wykorzystaniem oprogramowania do obliczeń symbolicznych¹⁴. Skłonność autora do tworzenia opowieści z życia była od dawna zgodna z naturalizmem Roberta H. Franka¹⁵.

Wprowadzony sposób wykładania był nowy zarówno dla prowadzącego, jak i studentów. W celu zmniejszenia stresu spowodowanego nową sytuacją dydaktyczną zastosowano rozwiązanie promujące tworzenie się inteligencji zbiorowej. Wiele przykładów wskazuje na istnienie naturalnej symbiozy tworzenia oprogramowania i działań społecznych oraz inteligencji zbiorowej. Po pierwsze, wykorzystano jako narzędzie wspomagające platformę e-learningową. Po drugie, system egzaminacyjny wspierał działania wspólne. Prowadzący podczas wykładów przedstawiał problemy ekonomiczne, które mogły pojawić się na egzaminie końcowym. Otwarte i punktowane fora tematyczne służyły do pracy wspólnej nad przedstawianymi zagadnieniami. Podczas egzaminu pisemnego każdy student miał do dyspozycji komputer i musiał rozwiązać zadania, których część obliczeniowa była przygotowana w ramach problemów przedstawionych podczas wykładów. Podczas tworzenia egzaminu celem prowadzącego było włożenie treści obliczeniowych do krańcowo różnej niż przedstawianej na wykładach scenografii ekonomicznej. I tak, zaprezentowany problem opodatkowania był omawiany na wykładach oraz był częścią pracy domowej. Na egzaminie ten sam problem pojawił się w analizie nieefektywności wprowadzania ceny regulowanej na rynku energii elektrycznej¹⁶.

Wspieraniem działań kolektywnych studentów było wprowadzenie prac zaliczeniowych pisanych w grupach. Jako kryterium ich oceny przyjęto ich społeczno-użyteczny charakter – tj. miały być one analizą ciekawego problemu ekonomicznego albo stanowić cenny materiał edukacyjny oparty na metodach obliczeniowych. Po roku od wprowadzenia tego rozwiązania okazało się, że jakość prac zaliczeniowych oraz wypowiedzi na forach była tak dobra, że prowadzący sam wprowadzał je do swoich zajęć. Stąd też, wzorując się na Robercie H.

¹³ Przykładem takiego podręcznika jest publikacja: J.R. Stinespring, *Mathematica for Microeconomics: Learning by Example*, Academic Press 2002.

¹⁴ Szczególnie inspirujące były wykłady online Wacława Zawadowskiego, <http://www.youtube.com/playlist?list=PLF97CE05568C0F385&feature=plcp>, [03.11.2012] oraz materiały dydaktyczne metodologii nauczania matematyki Anny Sierpińskiej, <http://www.annasierpiska.wkrib.com/>, [03.11.2012].

¹⁵ Podobnie jak Robert H. Frank, autor uważa, że specjalnością mózgu ludzkiego jest przyswajanie informacji w formie opowieści.

¹⁶ Przykład takiego egzaminu można znaleźć na stronie projektu, <http://lee.wne.uw.edu.pl/maxima>, [03.11.2012].

Franku, materiały te zostaną upublicznione, ale nie w formie papierowej¹⁷. W obecnym roku akademickim przygotowany zostanie portal mikroekonomii obliczeniowej, w którym znajdą się najciekawsze materiały zgromadzone w ramach obecnego i poprzednich kursów. Świadomość, że praca wykonana w ramach kursu może stać się istotnym składnikiem CV, stanowi dodatkowy czynnik motywujący. Celem tego portalu będzie akumulacja obliczeniowej wiedzy ekonomicznej. Będzie to wyjście poza ramy zamkniętego kursu, zgodnie z ideą *Open Access*¹⁸.

Podsumowanie

Programy CAS jak MAXIMA do obliczeń symbolicznych nie są remedium na wszelkie bolączki edukacji ekonomicznej. Nie jest to ani program wszechstronny, ani łatwy w nauce. Jednak pojawienie się ekonomii obliczeniowej może zmienić sposób nauczania tego przedmiotu. W dobie cyfrowej rewolucji łatwiej jest przekazać wiedzę poprzez wykorzystanie wszelkiego rodzaju symulacji, animacji czy wizualizacji, a także dodanie opowieści – narracji ekonomicznej, jednak najważniejszym efektem jest oderwanie się od żmudnych rachunków, zacierających istotę analizy, co wyzwala kreatywność i pozwala na skoncentrowaniu się na problemach, a nie narzędziach. Paradoxem jest to, że dopiero podejście obliczeniowe tak naprawdę obnaża słabość prezentowanych modeli formalnych.

Bibliografia

- M. Brzeziński, Recenzja książki P. Mirowskiego, *Machine Dreams: Economics Becomes a Cyborg Science*, „Studia Ekonomiczne” 2006, nr 4.
- M. Brzeziński, Recenzja książki E. Roy Weintrauba, *How Economics Became a Mathematical Science*, „Studia Ekonomiczne” 2003, nr 1–2.
- K. Devlin, *The Man of Numbers: Fibonacci's Arithmetic Revolution*, Walker and Company, 2011.
- J. Dzionek-Kozłowska, *System ekonomiczno-społeczny Alfreda Marshalla*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2007.
- R.H. Frank, *The Economic Naturalist: Why Economics Explains Almost Everything*, Virgin Books, 2008.
- W. Kwaśnicki, *Czy kryzys finansowy przyczynia się do kryzysu w naukach ekonomicznych*, „Studia ekonomiczne” 2009, nr 3–4 (LXII–LXIII).

¹⁷ Robert H. Frank opublikował najlepsze prace swoich studentów zebrane w formie książki: Robert H. Frank, *The Economic Naturalist: Why Economics Explains Almost Everything*, Virgin Books, 2008.

¹⁸ Autor jest bardzo krytycznie nastawiony do marnotrawstwa kapitału ludzkiego podczas studiów. Bardzo dobre prace magisterskie, licencjackie oraz zaliczeniowe nie mają szans na publikację w tradycyjny sposób – znaczny wysiłek intelektualny zostaje roztrwoniony. Więcej o idei *Open Access* można znaleźć na stronie: <http://otwartanauka.pl/>, [03.11.2012].

P. Mirowski, *Machine Dreams: Economics Becomes a Cyborg Science*, Cambridge University Press, Cambridge 2002.

W. Sosnowska, *Nauczanie ekonomii w XXI wieku – kształtowanie umiejętności posługiwania się wiedzą ekonomiczną (economic lieteracy)*, [w:] D. Kopycińska (red.), *Działania ekonomiczne podmiotów rynkowych – materiały konferencyjne*, [online], Katedra Mikroekonomii Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 2007.

J.R. Stinespring, *Mathematica for Microeconomics: Learning by Example*, Academic Press 2002.

E.R. Weintraub, *How Economics Became a Mathematical Science*, Duke University Press, Londyn 2002.

Netografia

Rising above the Gathering Storm, Energizing and Employing America for a Brighter Economic Future, The National Academies Press, Waszyngton 2005, http://www.nap.edu/catalog.php?record_id=11463.

P. Lockhart, *A Mathematician's Lament*, 2002 [online], www.maa.org/devlin/lockhartslament.pdf.

P. Lockhart, *Measurement*, Belknap Press of Harvard University Press, 2012 <http://www.hup.harvard.edu/catalog.php?isbn=9780674057555>.

Portal matematyki obliczeniowej <http://computerbasedmath.org/>.

Portal program Wolfram Alpha <http://www.wolframalpha.com/pro/?src=footer>.

Portal projektu MAXIMA <http://maxima.sourceforge.net/>.

Portal projektu Otwarta Nauka <http://otwartanauka.pl/>.

Strona Autora zawierająca kody do prezentowanej grafiki i zadań, przykłady egzaminów <http://lee.wne.uw.edu.pl/maxima>.

Strona zawierająca wykłady Wacława Zawadowskiego <http://www.youtube.com/playlist?list=PLF97CE05568C0F385&feature=plcp>.

Strona zawierająca materiały dydaktyczne metodologii nauczania matematyki Anny Sierpińskiej <http://www.annasierpinska.wkrib.com/>.

Abstract

Mathematical competences are one of the major factors influencing the effectiveness of teaching economics. The purpose of this paper is to present Computer Algebra System as a tool for teaching advanced microeconomics. The combination of e-learning and computation affects not only by increasing knowledge and skills of students, but the use of collaborative intelligence can also increase their social skills.

Nota o autorze

Tomasz Kopczewski jest pracownikiem Wydziału Nauk Ekonomicznych Uniwersytetu Warszawskiego – kierownikiem centrum badawczego Laboratorium Ekonomii Eksperymentalnej. Jego prace badawcze koncentrują się na analizowaniu oddziaływania czynników społeczno-ekonomicznych na wiedzę ekonomiczną lub szerzej – na świadomość ekonomiczną. Jest twórcą i propagatorem nowego podejścia do nauczania mikroekonomii, opartego na metodach eksperymentalnych i obliczeniowych. Od 6 lat prowadzi zajęcia e-learningowe wykorzystujące eksperymenty ekonomiczne, modelowanie Agent-based Computational Economics (ACE) oraz obliczenia symboliczne w MAXIMA.